ZADANIA PRZYGOTOWAWCZE DLA UCZESTNIKÓW VI MIĘDZYPOWIATOWEGO KONKURSU MATEMATYCZNEGO SZKÓŁ PONADGIMNAZJALNYCH

1. Sprawdź, czy liczba $b=\sqrt{16+6\sqrt{7}}+\sqrt{16-6\sqrt{7}}$ jest całkowita.
2. Wyznaczyć wartość liczbową wyrażenia $A=x^3-6x$, jeśli $x=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$
3. Oblicz $\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}}-\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}}$
4. Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych, które spełniają równanie $xy-2x-3y+2=0$.
5. Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=26 \\ x^3+y^3+z^3=36 \end{cases}$$
6. Rozwiąż równanie $x^2+xy+y^2=x-y-1$.
7. Oblicz wartość wyrażenia $q^4-6q^3+9q^2-7$ wiedząc, że $q^2-3q+1=0$.
8. Wykaż, że jeśli a i b są liczbami dodatnimi, to średnia arytmetyczna jest niemniejsza od średniej harmonicznej tych liczb.
9. Wykazać, że jeśli $c\in \boldsymbol{C}$ i $x=\frac{c+\sqrt{c^2+4}}{2}$, to $x-\frac{1}{x}\in \boldsymbol{C}$.
10. Funkcja f dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej x spełnia warunek $f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=\sqrt{x}$. Wyznacz f(9).
11. Niech p będzie liczbą pierwszą. Znaleźć wszystkie liczby całkowite x, dla których funkcja $f(x)=\frac{4x+8-p}{x+2}$ przyjmuje wartości całkowite.
12. Dla jakiej wartości parametru m równanie $\left||3x-6|-2\right|=m$ ma 3 rozwiązania?
13. Wykaż, że jeśli $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$, to $a=b=c$.
14. Wyznaczyć długości boków trójkątów prostokątnych, których obwód jest równy polu trójkąta.
15. Wewnątrz trójkąta równobocznego o boku długości 1 obrano punkt M odległy od wierzchołków A, B i C tego trójkąta odpowiednio o a, b i c. Wykazać, że $a^2+b^2+c^2<2$.
16. Oblicz pole trójkąta prostokątnego, gdy przeciwprostokątna wynosi 4, a suma przyprostokątnych $\sqrt{18}$.
17. Na trapezie, którego podstawy są równe 3 i 15, opisano okrąg o środku należącym do dłuższej podstawy. Oblicz pole tego trapezu.
18. W okrąg o promieniu 1 wpisano kwadrat i trójkąt równoboczny mające wspólny wierzchołek. Oblicz pole części wspólnej tych figur.
19. Trzy okręgi o promieniach 2, 4, 6 są parami zewnętrznie styczne. Oblicz długość promienia okręgu przechodzącego przez punkty styczności tych okręgów.
20. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle$ BAC = α, $\sphericalangle$ ABC= β oraz $\sphericalangle$ ACB= γ. Na bokach BC, AC i AB tego trójkąta wybrano odpowiednio punkty D, E i F w taki sposób, by AE = AF, BD = BF i CD = CE. Udowodnij, że

$$\sphericalangle EFD = \frac{\alpha+\beta}{2} = 90^0 - \frac{\gamma}{2}$$

21. Na bokach BC i CD równoległoboku ABCD zbudowano (na zewnątrz równoległoboku) trójkąty równoboczne BCK i DCL. Udowodnij, że trójkąt AKL jest równoboczny.

22. W danym kwadracie ABCD o boku długości 6, w którym przekątne AC i BD przecinają się w punkcie O, poprowadzono odcinek AE, gdzie E jest środkiem boku DC kwadratu ABCD. Wiedząc, że punkt M stanowi punkt przecięcia odcinka AE z przekątną BD, wyznacz pole trójkąta AMO oraz pole czworokąta CEMO.

23. Przekątne dzielą trapez na cztery trójkąty. Wykaż, że:

a) Stosunek pól tych trójkątów, w których jeden z boków jest podstawą trapezu, jest równy stosunkowi kwadratów długości podstaw trapezu.

b) Stosunek pól trójkątów takich, że bokiem jednego jest ramię trapezu, a bokiem drugiego jest podstawa trapezu, jest równy stosunkowi długości podstaw trapezu.

24. Znajdź zbiór punktów, których współrzędne spełniają równanie:

$$|y| + \frac{1}{|y|} = |x| + \frac{1}{|x|}$$