ZADANIA PRZYGOTOWAWCZE DLA UCZESTNIKÓW IV MIĘDZYPOWIATOWEGO KONKURSU MATEMATYCZNEGO SZKÓŁ PONADGIMNAZJALNYCH

1. Sprawdź, czy liczba $b=\sqrt{11+4\sqrt{7}}-\sqrt{11-4\sqrt{7}}$ jest całkowita.
2. Uzasadnij, $\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^2=8$
3. Wyprowadź wzory na $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ i $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3$ dla $x\neq 0$. Stosując wyprowadzone wzory oblicz $x^3+\frac{1}{x^3}$, jeżeli $x^2+\frac{1}{x^2}=7$.
4. Trzy różne liczby x, y, z spełniają warunek $\frac{y}{x-z}=\frac{x+y}{z}=\frac{x}{y}$. Wyznacz wartość ilorazu $\frac{x}{y}$.
5. Wykaż, że dla wszystkich liczb rzeczywistych nieujemnych x, y prawdziwa jest nierówność $x^3+y^3\geq x^2y+xy^2$.
6. Oblicz wartość wyrażenia $a^2+b^2+c^2$, jeśli a+b+c=10 i ab+ac+bc=-2.
7. Znajdź najmniejszą wartość wyrażenia $(3a-2)(3a+2)+b^2-6ab$.
8. Funkcja f dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej x spełnia warunek $f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=\sqrt{x}$. Wyznacz f(4).
9. Znajdź x, dla których suma $|x-5|+|x+1|$ jest najmniejsza.
10. Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x^2+xy+xz=8 \\ y^2+xy+yz=12 \\ z^2+yz+xz=-4 \end{cases}$
11. Znaleźć wszystkie liczby naturalne $\overline{ABC}$, takie, że $\overline{2ABC1}:\overline{1ABC2}=21:12$. Symbol typu $\overline{ABCDE}$ oznacza zapis dziesiętny liczby naturalnej o cyfrach A, B, C, D, E.
12. Wykazać, że dla dowolnego całkowitego m liczba $m(m+1)(m+2)(m+3)+1$ jest kwadratem liczby całkowitej.
13. Narysuj wykres funkcji f(x) = $\left||2x-1|-2\right|$, a następnie podaj jej zbiór wartości.
14. Wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego w trójkącie prostokątnym dzieli przeciwprostokątną na odcinki długości 4cm i 6cm. Oblicz pole i obwód trójkąta.
15. Wykaż, że pole trapezu prostokątnego opisanego na okręgu jest równe iloczynowi długości podstaw tego trapezu.
16. Na trapezie, którego podstawy są równe 3 i 15, opisano okrąg o środku należącym do dłuższej podstawy. Oblicz pole tego trapezu.
17. Dany jest kwadrat o boku a=6. W ten kwadrat wpisano trójkąt równoboczny, w ten sposób, że jeden wierzchołek trójkąta jest wierzchołkiem kwadratu, a przeciwległy bok jest równoległy do przekątnej kwadratu. Wykaż, że bok trójkąta ma długość $6\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$
18. W okrąg o promieniu 1 wpisano kwadrat i trójkąt równoboczny mające wspólny wierzchołek. Oblicz pole części wspólnej tych figur.

19. Wykaż, że jeśli pole czworokąta wypukłego jest równe 1, to suma długości jego boków jest niemniejsza od 4
20. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczba $p(p^3+p+1)$ jest parzysta.
21. Wykaż, że jeżeli $n \in N$, to liczba $100^n - 64$ jest podzielna przez 36.
22. Oblicz pole trójkąta prostokątnego, gdy przeciwprostokątna wynosi 4, a suma przyprostokątnych $\sqrt{18}$.
23. Punkt styczności okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny z przeciwprostokątną tego trójkąta dzieli ją na odcinki o długościach m i n. Udowodnij, że pole trójkąta jest równe iloczynowi długości tych odcinków.
24. W trapezie o podstawach a i b poprowadzono przez punkt przecięcia się jego przekątnych odcinek równoległy do podstaw. Wyznacz długość tego odcinka.
25. Wykaż, że jeżeli wysokości trójkąta o długościach h_1, h_2, h_3 spełniają równanie $(h_1h_3)^2 + (h_2h_3)^2 = (h_1h_2)^2$ to trójkąt jest prostokątny.