

**ZADANIA PRZYGOTOWAWCZE DLA UCZESTNIKÓW
IV MIĘDZYPOWIATOWEGO KONKURSU MATEMATYCZNEGO
GIMNAZJA**

1. Jaką cyfrę w rzędzie jedności ma liczba $2^{52} + 4^{26} + 5^8$?
2. Hurtownik kupił 3 tony bananów. $\frac{4}{5}$ bananów sprzedał z zyskiem 12%, a resztę z zyskiem 5%. Na całej transakcji zarobił 636zł. Ile zapłacił za wszystkie banany?
3. Zmieszano pewną ilość kilogramów 40% roztworu soli z dwa razy większą ilością kilogramów 10% roztworu tej soli. Ilu procentowy roztwór otrzymano?
4. Do prostokątnego pojemnika o wymiarach 20cm x 20cm x 50cm wiano 5 litrów mleka o 2-procentowej zawartości tłuszczu, a następnie do pełna dolano mleko o 10-procentowej zawartości tłuszczu. Ile procent zawartości tłuszczu ma mleko w pojemniku?
5. Suma cyfr liczby dwucyfrowej wynosi 10. Po przestawieniu cyfr tej liczby otrzymamy liczbę o 36 większą od początkowej. Jaka to liczba?
6. Przez którą z liczb a) 6 b) 9 c) 39 d) 13 jest podzielna liczba $3^{2009} + 3^{2008} + 3^{2007}$?
7. Ile jest liczb pięciocyfrowych o sumie cyfr równej 3?
8. O liczbach a, b, c, d wiadomo, że $a=bc$, $a+b=cd$, $a+b+c=d$, $a+b+c+d=1$ Wyznacz te liczby.
9. Wykaż, że jeżeli n jest liczbą naturalną, to liczba $(n+2)^4 - n^4$ jest podzielna przez 8.
10. Wiemy, że $x^2+2xy+y^2=16$ i $x^2-2xy+y^2=36$ oblicz x i y.
11. Wykaż, że liczba $\frac{6-3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-4}$ jest wymierna.
12. Wykaż, że liczba 3^{54} jest rozwiązaniem równania $243^{11} - 81^{14} + 7x = 9^{27}$.
13. Janek przejechał na rowerze odległość 20 km, a z powrotem przeszedł tę samą odległość pieszo z prędkością trzy razy mniejszą. Ile wynosiła prędkość jazdy, a ile prędkość marszu, jeśli cała podróż trwała 5 godzin i 20 minut?
14. Ile pełnych obrotów wykona koło pociągu towarowego na trasie z Zabrze do Gliwic, jeżeli odległość między stacjami w tych miastach wynosi 12km, a średnica koła ma długość 925mm? W obliczeniach przyjmij $\pi \approx 3$.
15. Autobus przejechał z miejscowości B do miejscowości A z prędkością średnią 80km/h, a wracał do B tą samą drogą z dziećmi jadącymi na wycieczkę z prędkością średnią 50 km/h. Jaka była jego średnia prędkość na całej trasie?
16. W trójkącie równoramiennym o podstawie 10 cm, ramiona są równe 13 cm. Oblicz sumę odległości środka wysokości opuszczonej na podstawę od wszystkich boków tego trójkąta.
17. Oblicz pole trójkąta równobocznego, jeśli suma długości promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt i promienia okręgu opisanego na tym trójkącie wynosi 9.
18. Środkiem symetrii rombu jest punkt (0,0). Jednym z jego wierzchołków jest punkt (2,-2). Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego rombu, jeśli jego pole wynosi 8.
19. Wyznacz pole i obwód ośmiokąta, w który wszystkie kąty wewnętrzne są równe, zaś boki mają długości $1, \sqrt{2}, 1, \sqrt{2}, 1, \sqrt{2}, 1, \sqrt{2}$ w podanej kolejności.
20. Dany jest trapez równoramienny ABCD, w którym $|AD| = |BC| = |CD| = 12$. Proste, na których leżą ramiona tego trapezu przecinają się pod kątem prostym. Oblicz obwód tego trapezu.
21. Udowodnij, że jeżeli w trójkącie prostokątnym jedna przyprostokątna jest dwa razy większa od drugiej przyprostokątnej, to wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną w stosunku 4:1.

22. O godzinie 15^{00} wskazówki zegara tworzą kąt prosty. Po jakim najkrótszym czasie wskazówki zegara pokryją się ze sobą.
23. Ile znajduje się na półce prostopadłościaków, a ile czworobocianów, jeżeli łącznie jest 28 brył i wszystkie one mają 192 wierzchołki.
24. W kąt ostry o wierzchołku A wpisano dwa okręgi styczne zewnętrznie. Oblicz promienie tych okręgów, jeżeli ich środki są oddalone od wierzchołka A odpowiednio o odcinki długości 7cm i 13cm.
25. Oblicz pole trapezu o podstawach 16, 44 oraz ramionach długości 25 oraz 17.
26. Trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC|$ rozcięto odcinkiem CD na dwa trójkąty równoramienne DCA i BCD tak, że $|AC| = |AD|$ oraz $|CD| = |BD|$. Udowodnij, że kąt $CAB = 36^0$.