

**ZADANIA PRZYGOTOWAWCZE DLA UCZESTNIKÓW
III KONKURSU MATEMATYCZNEGO
SZKOŁY PONADGIMNAZJALNE**

1. Wykaż, że jeśli $x + y + z = 0$, to $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.
2. Dla jakich wartości naturalnych n liczba $n^2 + 8n - 8$ jest kwadratem liczby naturalnej?
3. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba
 - a) $n^3 - n$ jest podzielna przez 6
 - b) $n^5 - n$ jest podzielna przez 5.
4. Oblicz $\frac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{(\sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{3})(\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{3})}$.
5. Oblicz $2\sqrt{160} \cdot \sqrt{12} + 3\sqrt{20} \cdot \sqrt{48} - 4\sqrt[4]{75} - 4\sqrt{60\sqrt{27}}$.
6. Naszkicuj wykres funkcji $y = \sqrt{x^2} - x + 1$
7. Znaleźć zbiór wartości funkcji $y = \frac{18x - 5x^2 - 20}{x^2 + 4}$.
8. Naszkicuj wykres funkcji $y = \frac{|x+1|}{x+1} + 2x$. Określ dziedzinę i zbiór wartości funkcji. Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie.
9. Punkty M i N są środkami podstaw AB i CD trapezu ($AB > CD$). Wiedząc, że $MN = \frac{1}{2}(AB - CD)$.
Udowodnij, że suma miar kątów BAD i ABC wynosi 90°
10. Dany jest trójkąt równoramienny, w którym podstawa ma długość 24, a ramię 15. Oblicz odległość między środkami okręgu wpisanego i opisanego na tym trójkącie.
11. W trójkąt równoboczny o boku a wpisano kwadrat w ten sposób, że dwa wierzchołki kwadratu leżą na jednym boku trójkąta, a dwa na pozostałych bokach trójkąta. Oblicz długość boku kwadratu
12. Po okręgu o długości 80cm poruszają się punkty A i B. Jeżeli kierunki ruchu są zgodne, to A wyprzedza B co 5 sekund, jeżeli przeciwne, to mijają się co 2 sekundy. Oblicz prędkości tych punktów.
13. Oblicz: $(\sqrt{3} + 1) \cdot \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}$.
14. Czy liczba $\sqrt[5]{\frac{2016^3 - 2015^3}{4031^2 - 2016 \cdot 2015}}$ jest liczbą naturalną? Odpowiedź uzasadnij wykonując odpowiednie obliczenia.
15. Wykaż, że jeżeli dwie dowolne liczby rzeczywiste a, b spełniają warunek $a \cdot b > 5$ to $a^2 + b^2 > 10$.
16. Znając długości boków trójkąta: a, b, c , oblicz odległości jego wierzchołków od punktów styczności boków z okręgiem wpisanym.
17. Wykaż, że jeśli funkcja f jest liniowa, to dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b zachodzi równość $f(a + b) + f(a - b) = 2f(a)$.
18. Funkcje $f(x) = ax + 8$ i $g(x) = 3x + b$ gdzie a, b są liczbami naturalnymi i $a \in (50, 75)$, wartość 2010 przyjmują dla tego samego argumentu. Znajdź współczynniki a i b .
19. W trójkącie ABC kąt B jest równy 30° , a wysokość CD dzieli bok AB w stosunku $|AD| : |DB| = 1 : 3$. Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny.
20. Udowodnij, że średnia arytmetyczna dowolnej liczby dodatniej różnej od 1 i jej sześcianu jest większa od kwadratu tej liczby.