ZADANIA PRZYGOTOWAWCZE DLA UCZESTNIKÓW I MIĘDZYPOWIATOWEGO KONKURSU MATEMATYCZNEGO
SZKÓŁ PONADGIMNAZJALNYCH

Zadanie 1.

Rozwinięcie dziesiętne liczby $\frac{3}{14}$ ma postać $0,a_1a_2a_3......$ Oblicz sumę $a_1 + a_2 + a_3. + ... + a_{2011}$.

Zadanie 2.

Znaleźć największą liczbę całkowitą nie większą niż wartość wyrażenia $\frac{f\left(1+\sqrt{7}\right)-f\left(1-\sqrt{7}\right)}{f\left(1-\sqrt{7}\right)+f\left(1+\sqrt{7}\right)}$, gdzie $f(x) = x^3 + x^2 - 7$

Zadanie 3.

W zbiorze liczb całkowitych rozwiąż równanie $3x^2 - 16y^2 = 7$

Zadanie 4.

Wykazać, że liczba $10^{2010} + 2008^{2009} - 2$ jest podzielna przez 9.

Zadanie 5.

Wykaż, że wartość wyrażenia

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{4+2\sqrt{3}}$$

jest liczbą całkowitą.

Zadanie 6.

Pewna liczba naturalna ma 4 dzielniki, których średnia arytmetyczna jest równa 10. Znajdź wszystkie takie liczby.

Zadanie 7.

Która z liczb $\sqrt{\frac{2004}{2005}}, \sqrt{\frac{2005}{2006}}$ jest większa?

Zadanie 8.

Sprawdź, czy liczba $a = \dfrac{\sqrt{2} - 1 - \dfrac{2}{1+\sqrt{2}}}{1-\sqrt{2} - \dfrac{2}{1+\sqrt{2}}}$ jest wymierna**?**

Zadanie 9.

Wykaż, że dla $a \in (2,3)$ zachodzi równość $\frac{\sqrt{a^2-6a+9}}{3-a} + \frac{\sqrt{a^2-4a+4}}{a-2} = 2$.

Zadanie 10.

Wartość wyrażenia $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2004}+\sqrt{2005}}$ jest :

a. mniejsza od $\sqrt{2005}$
b. większa od $\sqrt{2005}$
c. mieści się w przedziale (43,5;44).

Zadanie 11.
Dla jakich wartości m z odcinków 2m+2, m+8, 3m+1 można zbudować trójkąt równoramienny?
Zadanie 12.
W trójkącie ostrokątnym ABC długość boku AB=10, środkowej AK=9, a wysokość BL=8. Oblicz pole trójkąta ABC.
Zadanie 13.
Przez punkt A leżący na okręgu o środku O poprowadzono styczną l oraz cięciwę AB o długości 12. Oblicz stosunek pola trójkąta BOC do pola czworokąta OBAC, jeśli BC jest cięciwą tego okręgu równoległą do prostej l i odległą od niej o 4.
Zadanie 14.
Wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego w trójkącie prostokątnym dzieli przeciwprostokątną na odcinki długości 4cm i 6cm. Oblicz pole i obwód trójkąta.
Zadanie 15.
Wyznacz kąty czworokąta, w którym trzy boki maja równe długości, a czwarty bok ma długość równą długościom obu przekątnych.
Zadanie 16.
Z 10 zapałek ułóż 2 pięciokąty i 5 trójkątów.
Zadanie 17.
Znajdź wszystkie liczby całkowite x, dla których wyrażenie $\frac{7x+1}{x-2}$ ma wartość całkowitą.
Zadanie 18.
W klasie I jest nie więcej niż 50 uczniów. Z klasówki 1/7 z nich otrzymała piątki, 1/3 czwórki i połowa trójki. Pozostali uczniowie otrzymali oceny dopuszczające. Ilu ich było?
Zadanie 19
Paweł i Piotr ścigają się na 100m. Piotr wygrywa z Pawłem o 10m (tzn. w chwili, gdy Piotr był już na mecie, Paweł miał jeszcze do mety 10m). Startują drugi raz, ale tym razem, aby wyrównać szanse, Piotr startuje 10m przed linią startu, a Paweł z linii startu. Kto wygra za drugim razem zakładając, że będą biegli z tymi samymi stałymi prędkościami? (dla uproszczenia przyjmujemy, że ruch zawodników jest ruchem ze stała prędkością od startu do mety).
Zadanie 20.
Ziemię (przyjmijmy, że jest kulą) opasano wzdłuż równika szczelnie przylegającą do niej taśmą. Następnie dosztukowano jeszcze do niej 10m i na całej długości równo oddalono od powierzchni Ziemi. Czy pod taśmą zdoła się prześliznąć mysz?
Zadanie 21.
Kolejka toczy się po torach w kształcie okręgu. Rozstaw szyn jest równy 4 cm. Podczas jednego pełnego okrążenia lewe kółko wagonu wykonało o dwa obroty więcej niż prawe. Jaka jest długość średnicy kółek wagonu ?
Zadanie 22.
Każdy bok kwadratu jest średnicą koła. Wspólne części tych kół tworzą wewnątrz kwadratu rozetę czterolistną. Oblicz obwód i pole tej rozety wiedząc, że bok kwadratu ma długość a.
Zadanie 23.
Wykazać, że jeśli $a \in \mathrm{N}^+$ i reszta z dzielenia a przez 5 jest różna od 0 to liczba $a^8 + 3a^4 - 4$ jest wielokrotnością 100.
Zadanie 24.
Wyznacz największa i najmniejsza wartość funkcji f określonej wzorem $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$

Zadanie 25.
Pies dostrzegł w odległości 60 m lisa i rozpoczął pościg. Skok psa ma długość 2 m, skok lisa ma długość 1 m. Pies daje dwa skoki w czasie, w którym lis daje trzy skoki. Ile metrów musi przebyć pies, aby dogonić lisa?
Zadanie 26.
Smok ma 2000 głów. Rycerz może ściąć jednym cięciem 33, lub 21, lub 17, lub 1 głowę. Smokowi odrasta wtedy odpowiednio 48, 0, 14, 349 głów. Smok zostaje zabity, gdy wszystkie głowy zostają ścięte. Czy jeden rycerz może zabić smoka? Odpowiedź uzasadnij.
Zadanie 27.
Czterech chłopców brało udział w zawodach sportowych Andrzej, Bolek, Wiktor i Grzegorz. Następnego dnia na pytanie o wyniki zawodów odpowiedzieli:
Andrzej: „Nie byłem ani pierwszy ani ostatni"
Bolek: „Nie byłem ostatni"
Wiktor: „Zająłem pierwsze miejsce"
Grzegorz: „Zająłem ostatnie miejsce"
Tylko trzech chłopców powiedziało prawdę. Kto zajął pierwsze miejsce? Kto skłamał?
Zadanie 28.
Ania mówi: „Mam liczne rodzeństwo. Ja jestem szóstym dzieckiem i mam, co najmniej tylu braci, ile sióstr". Jej młodszy brat dodaje: „ Ja natomiast mam, co najmniej dwa razy więcej sióstr niż braci". Ile dziewczynek i ilu chłopców było w rodzinie Ali?
Zadanie 29.
Czy prawdziwa jest równość
$11(12^8 + 12^7 + 12^6 + \ldots + 12^3 + 12^2 + 13) + 1 = 12^9$? odpowiedź uzasadnij.
Zadanie 30.
Znajdź największą liczbę naturalną n, taką, że 2^n jest dzielnikiem liczby $3^{16} - 1$.
Zadanie 31.
Autobus przejechał z miejscowości B do miejscowości A z prędkością średnią 80 $\frac{km}{h}$, a wracał do B tą samą drogą z dziećmi jadącymi na wycieczkę z prędkością średnią 50 $\frac{km}{h}$. Jaka była jego średnia prędkość na całej trasie?
Zadanie 32.
Czy istnieją takie liczby a, b, c, że $\frac{(a+b)C-a}{c} = a$ oraz $\frac{ab+c}{b} - c = a$?
Zadanie 33.
Wykres funkcji $f(x) = 3x + 2a$ i $g(x)= \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}a - 1$ przecinają się w punkcie A na osi OX . B i C oznaczają punkty przecięcia się tych wykresów z osią OY. Wyznacz wartość a oraz współrzędne punktów A, B, C i oblicz pole trójkąta ABC.
Zadanie 34.
Odcinek łączący środki przeciwległych boków wypukłego czworokąta dzieli ten czworokąt na dwie figury o równych polach. Udowodnij, że czworokąt jest trapezem.
Zadanie 35.
Funkcja liniowa f spełnia warunki $f(1999) > 1999$ i $f(2001) > 2001$. Wykaż, że $f(2000) > 2000$.
Zadanie 36.
Cena biletu na mecz piłki nożnej wynosiła 150zł. Gdy cenę obniżono okazało się, że na mecz przychodziło o 50% widzów więcej, a dochód uzyskany ze sprzedaży biletów na jeden mecz wzrósł o 25%. O ile złotych obniżono cenę biletu?
Zadanie 37.
W banku A kapitalizacja odsetek następuje, co kwartał i lokaty oprocentowane są w wysokości 20% w stosunku rocznym, zaś w banku B kapitalizacja odsetek następuje dopiero

po roku, ale lokata jest oprocentowana w wysokości 21% w stosunku rocznym. Wybierz bank, w którym korzystniej można ulokować kapitał na jeden rok. Odpowiedź uzasadnij odpowiednimi rachunkami.

Zadanie 38.

Jaka powinna być najmniejsza średnica garnka, aby zmieściły się w nim (jeden obok drugiego) 4 słoiki, każdy o średnicy d?

Zadanie 39.

Mydło kulistego kształtu zużyło się tak, że powstała kula o promieniu trzykrotnie mniejszym od początkowego. Jaka część mydła zużyła się?

Zadanie 40.

Państwo Kowalscy mają kilkoro dzieci. Średnia wieku rodziny Kowalskich wynosi 18 lat. Natomiast średnia wieku wszystkich członków rodziny bez ojca, który ma 38 lat, jest równa 14 lat. Ile dzieci jest w rodzinie Kowalskich?

POWODZENIA ☺