

ZADANIA PRZYGOTOWAWCZE DLA UCZESTNIKÓW
II MIEDZYPOWIATOWEGO KONKURSU MATEMATYCZNEGO
SZKÓŁ PONADGIMNAZJALNYCH

1. Wykazać, że jeżeli $a, b, c > 0$, to :

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9.$$

2. **Iloczynem kartezjańskim** zbiorów A i B nazywamy zbiór wszystkich takich uporządkowanych par (a, b) , że a należy do zbioru A i b należy do zbioru B . Wyznacz iloczyn kartezjański $X \times Y$ zbiorów X i Y , gdzie $X = \{1, 3\}$, $Y = \{2, 4, 6\}$. Przedstaw jego interpretację na układzie współrzędnych.
3. Wykaż, że równanie $(2x - y + 3)^2 + 4xy = 4x^2 + y^2 + 9x - 1$ nie ma rozwiązań w zbiorze liczb całkowitych.
4. Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC . Udowodnij, że $CD > \frac{1}{2}(CA + CB - AB)$.
5. Uzasadnij, że pole trójkąta o bokach długości: $\sqrt{5}, 3\sqrt{5}, 5\sqrt{2}$ równe jest połowie iloczynu długości dwóch jego boków.
6. Jeden z boków trójkąta prostokątnego ma długość 6 cm i jest o tyle samo większy od boku najkrótszego i mniejszy od boku najdłuższego. Oblicz pole tego trójkąta.
7. Oblicz pole trapezu o podstawach długości 11 i 25 oraz ramionach długości 13 i 15. Oblicz długości przekątnych tego trapezu.
8. Rozwiąż równanie $x^2 + xy + y^2 = x - y - 1$.
9. W trójkącie prostokątnym równoramiennym o najdłuższym boku długości 8 cm poprowadzono dwusieczną jednego z kątów ostrych. Oblicz długości odcinków, na jakie dwusieczna ta podzieliła przeciwległy bok trójkąta.
10. Dla jakich wartości m z odcinków $2m+2, m+8, 3m+1$ można zbudować trójkąt równoramienny?
11. W trójkącie ostrokątnym ABC długość boku $AB=10$, środkowej $AK=9$, a wysokość $BL=8$. Oblicz pole trójkąta ABC .
12. Przez punkt A leżący na okręgu o środku O poprowadzono styczną l oraz cięciwę AB o długości 12. Oblicz stosunek pola trójkąta BOC do pola czworokąta $OBAC$, jeśli BC jest cięciwą tego okręgu równoległą do prostej l i odległą od niej o 4.
13. Znajdź wszystkie liczby całkowite x , dla których wyrażenie $\frac{3x}{x-4}$ ma wartość całkowitą.
14. Kolejka toczy się po torach w kształcie okręgu. Rozstaw szyn jest równy 4 cm. Podczas jednego pełnego okrążenia lewe kółko wagonu wykonało o dwa obroty więcej niż prawe. Jaka jest długość średnicy kółek wagonu ?
15. Oblicz $x^3 + \frac{1}{x^3}$, jeżeli $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$
16. Oblicz wartość wyrażenia $q^4 - 6q^3 + 9q^2 - 7$ wiedząc, że $q^2 - 3q + 1 = 0$.
17. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{a^2 + 4b^2}{2ab}$ wiedząc, że liczby dodatnie a i b spełniają warunek $\frac{a^2 - 6b^2}{ab} = -1$.
18. Niech a i b będą liczbami całkowitymi. Udowodnij, że $M = (a + b)^4 - 2(a^2 + b^2)(a + b)^2 + 2(a^4 + b^4)$ jest kwadratem liczby naturalnej.